11.1　ストンメルの解

準地衡流渦位方程式 (9.33) を用いる。ただし、定常を仮定し、非線形項は無視する。

$$\beta\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0 H}\mathrm{curl}_z\vec{\tau} - r\nabla_H^2\psi \tag{11.1}$$

となる。方程式が２階微分なので、東岸と西岸で東西流がゼロという条件を含めることができる。南北の長さが、L_y、東西、L_x、の矩形の海を考える。$x=0, x=L_x, y=0, y=-L_y$ に岸があるとする。岸に直交する流速がゼロという条件は、岸に沿って流線関数の値が一定ということである。この一定値をゼロとすると、境界条件は、$x=0, x=L_x, y=0, y=-L_y$ で$\psi=0$ということになる。簡単のために、

$$\tau^{(x)} = \tau_0\cos\frac{\pi y}{L_y}, \qquad \tau^{(y)} = 0 \tag{11.2}$$

という風を考える。このとき、

$$\mathrm{curl}_z\vec{\tau} = \frac{\pi}{L_y}\tau_0\sin\frac{\pi y}{L_y} \tag{11.3}$$

なので

$$\psi(x,y) = \phi(x)\sin\frac{\pi y}{L_y} \tag{11.4}$$

は、(11.1) の解であり、かつ、$y=0, y=-L_y$ での境界条件を満足している。$\psi(x)$ に関する方程式は

$$r\frac{d^2\phi}{dx^2} + \beta\frac{d\phi}{dx} - r\left(\frac{\pi}{L_y}\right)^2\phi = \frac{\pi}{\rho_0 L_y H}\tau_0 \tag{11.5}$$

となる。境界条件は $x=0, x=L_x$ で $\phi=0$。解は、

$$\phi(x) = -\frac{\pi\tau_0}{r\rho_0 H L_y}\left\{1 - \frac{e^{-\alpha_1 x}}{e^{\alpha_2 L_x} - e^{-\alpha_2 L_x}}\left[\left(e^{\alpha_2 L_x} - e^{\alpha_1 L_x}\right)e^{-\alpha_2 x} - \left(e^{-\alpha_2 L_x} - e^{\alpha_1 L_x}\right)e^{\alpha_2 x}\right]\right\} \tag{11.6}$$

ここで、

$$\alpha_1 = \frac{\beta}{2r}, \quad \alpha_2 = \sqrt{\alpha_1^2 + \left(\frac{\pi}{L_y}\right)^2} \tag{11.7}$$